الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Bac 2019

مجلة
سند المجتهد في الرياضيات
المتتاليات

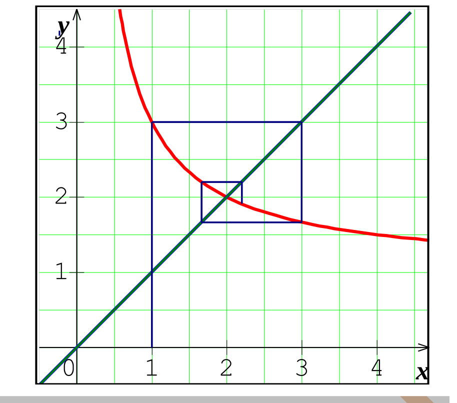
تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية.

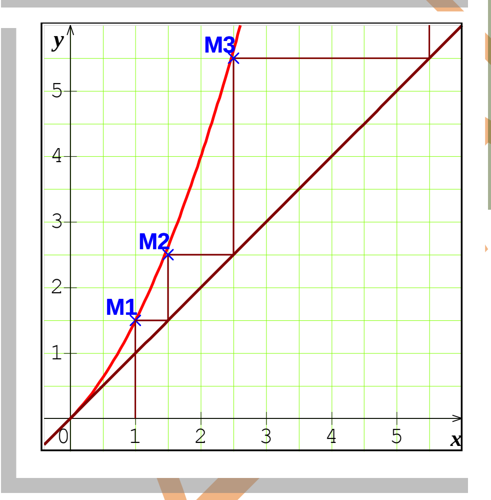
أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي π .

في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي ليونارد فيبو ناتشي المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ مع $u_0 = 1$ و $u_1 = 1$ ، و التي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات .

المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى .

في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .





التحضير لشهادة البكالوريا

Math

- شعبة الرياضيات
- شعبة علوم تجريبية
- شعبة تقني رياضي

من إعداد الاستاذة :

أزرايب جميلة

" لكي تنجح يجب على رغبتك بالنجاح أن تفوق خوفك من الفشل "

ملخص : المتتاليات الحسابية والهندسية

المتتاليات الهندسية

(u_n) متتالية هندسية أساسها q

التعريف (العلاقة التراجعية): $u_{n+1} = u_n \times q$

عبارة الحد العام :

حدها الأول u_0 : $u_n = u_0 \times q^n$

حدها الأول u_1 : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

☜ إذا كان $q \neq 1$: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$

$$= u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

أو

$$= u_p \times \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}$$

☜ إذا كان $q = 1$: معناه المتتالية ثابتة

$u_p = u_{p+1} = ... = u_n$

ومنه : $S = u_p \times (n-p+1)$

اتجاه التغير : إذا كان الحد الأول غير معدوم

$q \prec 0$ معناه المتتالية (u_n) غير رتيبة

$q = 1$ معناه المتتالية (u_n) ثابتة

$q \succ 0$ معناه المتتالية (u_n) رتيبة

ولمعرفة اتجاه تغيرها في هذه الحالة نختار طريقة مناسبة لذلك (الفرق أو الدالة المرفقة $u_n = f(n)$ أو المقارنة)

العلاقة بين حدين : $\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$

الوسط الهندسي : a ، b و c حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

$b^2 = a \times c$

المتتاليات الحسابية :

(u_n) متتالية حسابية أساسها r

التعريف (العلاقة التراجعية): $u_{n+1} = u_n + r$

عبارة الحد العام :

حدها الأول u_0 : $u_n = u_0 + nr$

حدها الأول u_1 : $u_n = u_1 + (n-1)r$

حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية:

$$S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$$

$$= \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

اتجاه التغير : لنا $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه

$r = 0$ معناه المتتالية (u_n) ثابتة

$r \succ 0$ معناه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$r \prec 0$ معناه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

العلاقة بين حدين : $u_m - u_p = (m-p)r$

الوسط الحسابي : a ، b و c حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

$2b = a + c$

Bac 2019

اذا أنت لم تزرع ورأيت غيرك حاصداً ، ندمت على تفريطك أيام الزرع

تمرين (1) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$

1) الشكل المقابل هو تمثيل بياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;5]$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها .

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

ج) برهن بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ 1$

د) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة ، عين نهايتها

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n=\frac{1}{u_n-1}$$

أ) أحسب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 ، اعط تخمين حول طبيعة المتتالية (v_n) ؟

ب) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ ثم أكتب v_n بدلالة n. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) أحسب بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_n.v_n+u_{n+1}.v_{n+1}+u_{n+2}.v_{n+2}+.....+u_{n+2018}.v_{2018}$.

تمرين (2) :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي ، من اجل كل عدد طبيعي n : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2+3u_n^{\ 2}}{1+3u_n} \end{cases}$

① بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}=\dfrac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$

② برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n \prec 2$

③ بين ان المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة .

④ أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{3u_n}{1+3u_n}\prec\dfrac{6}{7}$ ثم استنتج ان $2-u_{n+1}\prec\dfrac{6}{7}(2-u_n)$

ب) استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n\prec\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ ثم اوجد نهاية المتتالية (u_n).

تمرين (3) :

نعتبر المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان بـ: $u_0=0$ و $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{4}$ و $v_{n+1}=\dfrac{3v_n+1}{4}$

1- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n\le 1\le v_n$.

2- بين أن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $t_n=v_n-u_n$ هندسية ثم استنتج نهايتها .

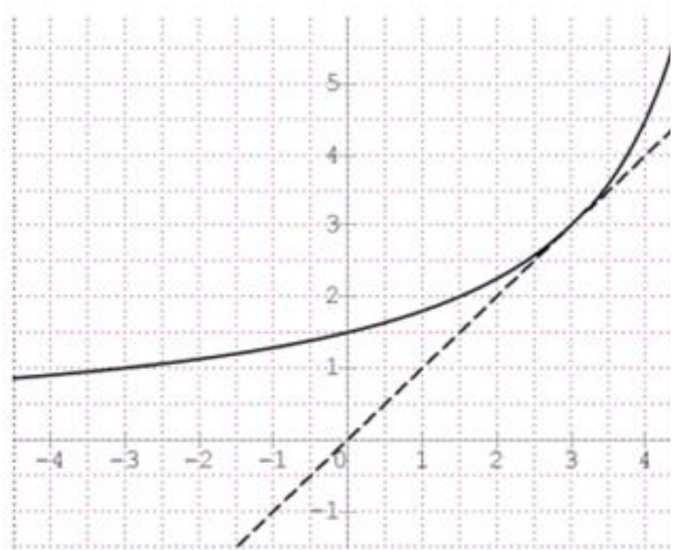
3- أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وجد نهايتهما المشتركة .

تمرين (4):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty;6[$ ب: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب: $u_0=-3$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، يعطى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f كما هو مبين في الشكل المقابل .



① أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 3$

③ أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n=\frac{1}{u_n-3}$$

أ) بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n

ت) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين (5):

(u_n) متتالية عددية معرفة ب: $u_0=\dfrac{11}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n-4$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \succ 2$.

ب – أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=4u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا ، أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\dfrac{u_0}{4^0}+\dfrac{u_1}{4^1}+\dfrac{u_2}{4^2}+.....+\dfrac{u_n}{4^n}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\dfrac{u_n}{4^n}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع S_n.

تمرين (6) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$

1) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ أرسم المستقيمين $(D): y=\frac{2}{3}x+1$ و $(\Delta): y=x$.

أ - مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

ب -. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n \succ 3$

ج -أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها.

2) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) حيث : $v_n=2^n.3^{1-n}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الاول .

ب- برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $v_n=u_n-3$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) لتكن (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n=\ln(v_n)$

أ- بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب - ليكن المجموع : $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+.....+\frac{u_n}{v_n}$ ، بين ان : $S_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+n-1$.

تمرين (7) :

f دالة عددية معرفة على $]-3;6]$ حيث : $f(x)=-3+\sqrt{x+3}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=6$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ فان $u_{n+1}=f(u_n)$

① بين ان f متزايدة على المجال $]-3;6]$

② حل في المجال $]-3;6]$ المعادلة : $f(x)=x$.

③ أرسم المنحنى (C).

④ مثل دون حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

⑤ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فان : $u_n \succ -2$

⑥ بين ان المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

⑦ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n=\ln(u_n+3)$

أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج- لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $w_n=u_n+3$

- أحسب بدلالة n الجداء p_n حيث : $p_n=w_0\times w_1\times...\times w_n$.

تمرين (8):

☜ f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2) بين أنه من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

☜ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1) احسب الحدين u_1 و u_2

2) أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n \prec u_{n+1} \prec 1$.

ب)استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

☜ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n^2-1$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$S_n=(u_0-1)(u_0+1)+(u_1-1)(u_1+1)+(u_2-1)(u_2+1)+\ldots+(u_n-1)(u_n+1)$$

$$S'_n=(u_0^2-0)+(u_1^2-1)+(u_2^2-2)+\ldots+(u_n^2-n)$$

تمرين (9):

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

① تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

② أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0\prec u_n \prec \frac{1}{2}$.

ب) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين ان المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

③ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

ا) أثبت ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها 6.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج ان $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\ldots\ldots+\frac{1}{u_n}$

تمرين 10 :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{3-2u_n}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0\prec u_n\prec 1$.

ب- بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{u_n}{u_n-1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وأحسب حدها الاول v_0 .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{1+3^n}$.

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

د- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$

تمرين (11) :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\alpha$ حيث α عدد حقيقي ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$

I) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة .

II) فيما يلي نفرض أن $u_0=3$.

① أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ، خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

② برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n\geq -4$

③ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

④ هل (u_n) متقاربة ؟ حدد نهايتها .

لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+4$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n.

ج) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

تمرين (12) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على ℕ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n\geq 4$.

3) بين أن (u_n) متتالية متناقصة. هل (u_n) متتالية متقاربة ؟ عين نهايتها .

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الاول v_0.

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

ج) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

تمرين (13) :

☜ لتكن f دالة معرفة على المجال $[0;2]$ كمايلي : $f(x)=-x^2+2x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

☜ (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{8}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=-u_n^2+2u_n$

① برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 \prec u_n \prec 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=1-u_n$

أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=(v_n)^2$.

ب- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

ج- أحسب نهاية u_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين (14) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2}+e^2 \\ eu_{n+1}-u_n=\frac{e-1}{2} \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq \frac{1}{2}$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة .

☜ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : $v_n=\ln\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$.

3) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

4) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

5) أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

ب - أحسب المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n=u_0+u_1+...+u_n$

تمرين (15) :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0=3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}$.

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$

2) أدرس اتجاه تغير (u_n) ثم استنتج انها متقاربة .

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=\frac{2}{2u_n-3}$.

أ) بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) أحسب بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_0v_0+u_1v_1+...+u_nv_n$

تمرين (16) :

(u_n) متتالية عددية حدها الاول $u_1=\frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{n}{4(n+1)}u_n$

① أ) احسب الحدود u_2 و u_3 .

ب)برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$

ج)أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة وأحسب نهايتها .

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=n.2^n.u_n$

أ- بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وأثبت تقارب المتتالية (u_n).

③ أحسب المجموع $S_n=v_1+v_2+v_3+...+v_n$

- أحسب الجداء $p_n=u_1(2u_2)(3u_3)...(nu_n)$

تمرين (17) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي : $u_0=0$ ، $u_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n u_n$

① أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

ب-أكتب v_n بدلالة n .

② بين ان (w_n) متتالية حسابية أساسها 5 ، ثم عين w_n بدلالة n.

③ أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

④ أكتب u_n بدلالة n.

⑤ أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 \prec u_{n+1} \le \frac{2}{5}u_n$

ب-استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 \prec u_n \le \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج-استنتج نهاية المتتالية (u_n).

تمرين (18) :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$

① أ) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;1]$.

ب)استنتج أنه إذا كان $x\in[0;1]$ فان $f(x)\in[0;1]$.

ج)مثل بيانيا المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $10cm$).

② نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) باستعمال المنحنى (C) عين على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

ب) أعط تخمينا حول اتجاه وتقارب المتتالية (u_n)

③ أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n \le 1$

ب)بين ان : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج)هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك .

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n .

ج)استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين (19):

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أ- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$.

ب – بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n=u_n^2-1$.

أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$.

ب- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

ج - أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من S_n و T_n حيث :

$S_n=u_0^2+u_1^2+..............+u_n^2$

$T_n=v_0+2v_1+.............+2^n v_n$

تمرين (20):

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الاول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+n-2$

① أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

② أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ ، $u_n\geq 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل $n\geq 5$ ، $u_n\geq n-3$.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

③ نعرف المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n=-2u_n+3n-\dfrac{21}{2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب v_n بدلالة n .

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}n-\dfrac{21}{4}$

④ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $T_n=v_0+v_1+......+v_n$ و $S_n=u_0+u_1+......+u_n$

- أجسب بدلالة n المجموع T_n ثم استنتج المجموع S_n بدلالة n .

تمرين (21) :

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

ب) بين أنه اذا كان $x\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ فان $f(x)\in\left[1;\sqrt{3}\right]$.

2- (u_n) متتالية عددية معرفة على ℕ كمايلي :

$u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) ، مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل – دون حسابها – مبرزا خطوط التمثيل

ب) اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3- أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\sqrt{3}$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ) استنتج أن (u_n) متقاربة .

4- (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

5- أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n=\frac{(u_0\times u_1\times....\times u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2)......(3-u_n^2)}$

تمرين (22) :

☜ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على ℕ بحدها الاول $u_0=1$ ومن أجل كل n من ℕ فان $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\alpha)$ ، α من ℝ

1- عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

☜ لنعتبر في كل ما يأتي $\alpha=-2$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من ℕ فان : $u_n\ge-2$.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها .

4- لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على ℕ ب : $v_n=u_n+2$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

تمرين (23):

I - f الدالة العددية المعرفة على المجال $[-6;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+6}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2- عين نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

3 – أنشئ المنحى (C_f) والمستقيم (Δ).

II - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0=-1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$

1- أ- مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل مبرزا خطوط التمثيل .

ب – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2\prec u_n\prec 3$.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4- برر تقارب المتتالية (u_n) ثم احسب نهايتها .

5- أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $|3-u_{n+1}|\leq\frac{1}{5}|3-u_n|$ ثم استنتج أن $|3-u_n|\leq\frac{2^2}{5^n}$.

ب) أحسب نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى .

تمرين (24) :

I) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\frac{1}{3}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{1+2u_n}\right)$

ب) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

2) أ- تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب – بين ان المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها .

II) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n=\frac{1-u_n}{2u_n}$

1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

2) أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+........+\frac{1}{u_{n-1}}$.واستنتج قيمة S_{2019}.

تمرين (25):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\leq u_n\leq 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\leq\frac{4-u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq 4-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

تمرين (26) :Amérique du Nord 2005

I) في الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

① أدرس اتجاه تغير f على المجال $[0;2]$.

② بين أنه من اجل كل $x\in[1;2]$ فان $f(x)\in[1;2]$.

II) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على ℕ بـ:

$$\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}v_0=2\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$$

① أ) انشئ على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الاولى مبرزا خطوط الاسقاط.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

② أ) برهن بالتراجع :

- من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le v_n\le 2$.
- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}\le v_n$.

ب) برهن بالتراجع :

- من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 2$.
- من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le u_{n+1}$.

③ أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ب) استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي α . حدد القيمة المضبوطة لـ α .

تمرين 27 :Pondicherry 2004

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الاول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$

① أحسب u_1 ، u_2 و u_3 وأكتبها على شكل كسر غير قابل للاختزال .

② قارن الحدود الاربعة الاولى من المتتالية (u_n) مع الحدود الاربعة الاولى من المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n=\frac{n}{n+1}$.

③ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=w_n$

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بـ: $v_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

① برهن أن : $v_1+v_2+v_3=-\ln(4)$

② أ) ليكن المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=v_1+v_2+....+v_n$. أكتب S_n بدلالة n .

ب) أحسب نهاية S_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين 28 :

☜ f دالة معرفة على المجال $]2;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2+1}$

- بين انه من أجل كل $]2;+\infty[$ فان : $f'(x)=\frac{x^4+x^2+2x(x-2)}{(x^2+1)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;+\infty[$.

☜ (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0=\frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $2\prec u_n\prec 3$.

2) بسط العبارة $u_n^2-\frac{9}{10}(u_n^2+1)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n^2\prec\frac{9}{10}(u_n^2+1)$.

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-2=\frac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$.

5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\prec u_n-2\prec\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين 29 :

I- (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1=e^2$ ، ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n}{e}}$

① أحسب كل من u_2 و u_3

② أ- اثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ\frac{1}{e}$

ب – بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\prec 1$

جـ - تحقق ان (u_n) متناقصة ، ثم استنتج انها متقاربة .

II- نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $w_n=\frac{1+\ln u_n}{2}$

① بين ان (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

② أ- عبر عن w_n بدلالة n ثم استنتج ان $u_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

ب – أحسب نهاية (u_n).

تمرين 30 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=e$ ومن اجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

ولتكن (v_n) متتالية معرفة على ℕ بـ: $v_n=\ln(u_n)$

1) أثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

2) أوجد عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$ ، $P_n=u_0\times u_1\times....\times u_n$

- أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $P_n=e^{S_n}$

4) استنتج عبارة P_n بدلالة n . أوجد نهاية S_n ثم استنتج نهاية P_n لما n يؤول الى $+\infty$.

حل التمرين 1 :

أ) **تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل .**

ب) **التخمين حول اتجاه التغير وتقاربها:**

من تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة .

ج) **البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي** $n: u_n \succ 1$

طريقة أولى : كتابة u_{n+1} من الشكل $a+\dfrac{b}{u_n+2}$.

لدينا : $a+\dfrac{b}{u_n+2}=\dfrac{a(u_n+2)+b}{u_n+2}=\dfrac{au_n+2a+b}{u_n+2}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=4 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=4 \\ b=-9 \end{cases}$ وعليه : $u_{n+1}=4-\dfrac{9}{u_n+2}$

☜ من اجل $n=0$: $u_0=3\succ 1$ محققة .

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \succ 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1}\succ 1$)

لدينا : $u_n \succ 1$ تكافئ : $u_n+2\succ 3$ تكافئ $\dfrac{1}{u_n+2}\prec\dfrac{1}{3}$ تكافئ $\dfrac{-9}{u_n+2}\succ -3$ تكافئ $4-\dfrac{9}{u_n+2}\succ 1$ ومنه : $u_{n+1}\succ 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن: من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n\succ 1$.

طريقة ثانية :

☜ من اجل $n=0$: $u_0=3\succ 1$ محققة .

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ($u_n\succ 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ ($u_{n+1}\succ 1$ أي $u_{n+1}-1\succ 0$)

$$u_{n+1}-1=\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1=\frac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2}=\frac{3u_n-3}{u_n+2}=\frac{3(u_n-1)}{u_n+2}$$

بما ان : $u_n\succ 1$ فان $3(u_n-1)\succ 0$ و $u_n+2\succ 0$ ومنه $u_{n+1}-1\succ 0$ ومنه $u_{n+1}\succ 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن: من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n\succ 1$.

د) **دراسة اتجاه تغير المتتالية** (u_n) **: ندرس اشارة الفرق** $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-1}{u_n+2}-u_n=\frac{4u_n-1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{4u_n-1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+2}=\frac{-(u_n-1)^2}{u_n+2}$$

بما ان $u_n\succ 1$ فان $u_n+2\succ 0$ و $-(u_n-1)^2\prec 0$ اذن $u_{n+1}-u_n\prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على ℕ.

☜ **استنتاج انها متقاربة :** المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

☜ **حساب النهاية :** بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

لنا : $\dfrac{4l-1}{l+2}=l$ تكافئ : $4l-1=l(l+2)$ تكافئ : $4l-1=l^2+2l$ تكافئ : $l^2-2l+1=0$ تكافئ : $(l-1)^2=0$

تكافئ $l=1$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

2) أ) **حساب الحدود :**

$v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$ ، $v_1=\dfrac{1}{u_1-1}=\dfrac{1}{\dfrac{4\times 3-1}{3+2}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{11}{5}-1}=\dfrac{5}{6}$ ، $v_2=\dfrac{1}{u_2-1}=\dfrac{1}{\dfrac{4\times\frac{11}{5}-1}{\frac{11}{5}+2}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{13}{7}-1}=\dfrac{7}{6}$

☜ اعطاء تخمين حول طبيعة المتتالية : نلاحظ أن $v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3}$ فنخمن ان (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$.

ب) البرهان ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n+2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \frac{3}{3(u_n-1)} = \frac{u_n+2-3}{3(u_n-1)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n-1)} = \frac{1}{3}$$

☜ كتابة v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = v_0 + nr$ ومنه : $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$

☜ كتابة u_n بدلالة n :

☜ لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ تكافئ : $\frac{1}{v_n} = u_n - 1$ تكافئ: $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$ ومنه : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1$

☜ حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1 = 0 + 1 = 1$

3) حساب المجموع S_n : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ تكافئ : $v_n(u_n - 1) = 1$ تكافئ : $v_n u_n - v_n = 1$ تكافئ : $v_n u_n = v_n + 1$ ومنه :

$$S_n = u_n.v_n + u_{n+1}.v_{n+1} + u_{n+2}.v_{n+2} + ... + u_{n+2018}.v_{n+2018}$$
$$= v_n + 1 + v_{n+1} + 1 + v_{n+2} + 1 + ... + v_{n+2018} + 1$$
$$= v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + ... + v_{n+2018} + 1 + 1 + 1 + ... + 1$$
$$= \frac{n + 2018 - n + 1}{2}(v_n + v_{n+2018}) + 1 \times (n + 2018 - n + 1)$$
$$= \frac{2019}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n+2018)\right) + 2019$$
$$= \frac{2019}{2}\left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{2018}{3}\right) + 2019$$
$$= \frac{2019}{2} + \frac{2019}{3}n + \frac{2037171}{3} + 2019$$
$$= 673n + \frac{4092513}{6} = 673n + \frac{1364171}{2}$$

حل التمرين 2 :

لدينا : (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي ، من اجل كل عدد طبيعي n : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} \end{cases}$

① **بيان انه من اجل كل عدد طبيعي n :** $2 - u_{n+1} = \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n}$

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{2(1 + 3u_n) - (2 + 3u_n^2)}{1 + 3u_n} = \frac{2 + 6u_n - 2 - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{6u_n - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n}$$

② **البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي n:** $0 \prec u_n \prec 2$

من اجل $n = 0$: $0 \prec u_0 = 1 \prec 2$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0 \prec u_n \prec 2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0 \prec u_{n+1} \prec 2$)

لدينا : $0 \prec u_{n+1} \prec 2$ تكافئ : $\begin{cases} u_{n+1} \succ 0 \\ u_{n+1} \prec 2 \end{cases}$

لدينا : $0 \prec u_n \prec 2$ اذن : $2+3u_n^2 \succ 0$ و $1+3u_n \succ 0$ ومنه : $\frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} \succ 0$ وبالتالي : $u_{n+1} \succ 0$ .... (1)

لدينا : $0 \prec u_n \prec 2$ ومنه : $2-u_n \succ 0$ و $3u_n \succ 0$ و $1+3u_n \succ 0$ ومنه : $\frac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n} \succ 0$

ومنه : $2-u_{n+1} \succ 0$ أي : $u_{n+1} \prec 2$ .... (2)

من (1) و(2) نجد : $0 \prec u_{n+1} \prec 2$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 2$.

③ **بيان ان المتتالية (u_n) متزايدة :**

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} - u_n = \frac{2+3u_n^2 - u_n(1+3u_n)}{1+3u_n} = \frac{2+3u_n^2 - u_n - 3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2-u_n}{1+3u_n}$$

لدينا : $0 \prec u_n \prec 2$ اذن : $2-u_n \succ 0$ و $1+3u_n \succ 0$ أي: $u_{n+1}-u_n \succ 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على .

☜ استنتاج أن (u_n) متقاربة : لدينا (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 2 فهي متقاربة .

④ أ) **بيان انه من اجل كل عدد طبيعي n :** $\frac{3u_n}{1+3u_n} \prec \frac{6}{7}$ (نبين أن $\frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} \prec 0$)

$$\frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} = \frac{7\times 3u_n - 6(1+3u_n)}{7(1+3u_n)} = \frac{21u_n - 6 - 18u_n}{7(1+3u_n)} = \frac{-6+3u_n}{7(1+3u_n)} = \frac{-3(2-u_n)}{7(1+3u_n)}$$

لدينا $0 \prec u_n \prec 2$ اذن : $2-u_n \succ 0$ و $7(1+3u_n) \succ 0$ و $-3 \prec 0$ ومنه $\frac{3u_n}{1+3u_n} - \frac{6}{7} \prec 0$ معناه $\frac{3u_n}{1+3u_n} \prec \frac{6}{7}$

☜ **الاستنتاج :**

لدينا : $\frac{3u_n}{1+3u_n} \prec \frac{6}{7}$

بما ان : $2-u_n \succ 0$ فان : $\frac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n} \prec \frac{6(2-u_n)}{7}$ ومنه : $2-u_{n+1} \prec \frac{6}{7}(2-u_n)$

ب) **استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n :** $2-u_n \prec \left(\frac{6}{7}\right)^n$:

لدينا : $2-u_{n+1} \prec \frac{6}{7}(2-u_n)$

$$\begin{cases} \text{من اجل } n=0 : & 2-u_1 \prec \frac{6}{7}(2-u_0) \\ \text{من اجل } n=1 : & 2-u_2 \prec \frac{6}{7}(2-u_1) \\ \text{من اجل } n=2 : & 2-u_3 \prec \frac{6}{7}(2-u_2) \\ \vdots \\ \text{من اجل } n-1 : & 2-u_n \prec \frac{6}{7}(2-u_{n-1}) \end{cases}$$

بضرب المتباينات نجد: $2-u_n \prec \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1-0+1}(2-u_0)$ أي : $2-u_n \prec \left(\frac{6}{7}\right)^n(2-1)$ ومنه : $2-u_n \prec \left(\frac{6}{7}\right)^n$

☜ نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $0 \prec 2-u_n \prec \left(\frac{6}{7}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-u_n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

حل التمرين 3 :

لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان بـ: $u_0 = 0$ و $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$

1) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \le 1 \le v_n$.

من اجل $n=0$: $u_0 = 0 \le 1 \le v_0 = 2$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \le 1 \le v_n$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \le 1 \le v_{n+1}$)

لنا : $u_n \le 1 \le v_n$ تكافئ : $3u_n+1 \le 3\times1+1 \le 3v_n+1$ تكافئ : $\frac{3u_n+1}{4} \le \frac{3\times1+1}{4} \le \frac{3v_n+1}{4}$

تكافئ : $\frac{3u_n+1}{4} \le 1 \le \frac{3v_n+1}{4}$ ومنه : $u_{n+1} \le 1 \le v_{n+1}$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \le 1 \le v_n$.

2) بيان أن المتتالية (t_n) المعرفة على ℕ بـ: $t_n = v_n - u_n$ هندسية.

$$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4} = \frac{3v_n+1-3u_n-1}{4} = \frac{3v_n-3u_n}{4} = \frac{3(v_n-u_n)}{4} = \frac{3}{4}t_n$$

ومنه (t_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

☜ **استنتاج نهاية (t_n)** : لدينا : $t_0 = v_0 - u_0 = 2-0 = 2$ ومنه : $t_n = t_0 \times q^n = 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\times0 = 0$

3) اثبات أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وإيجاد نهايتهما المشتركة :

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+1-4u_n}{4} = \frac{1-u_n}{4} \ge 0$ لان $u_n \le 1$ ومنه (u_n) متزايدة تماما على ℕ.

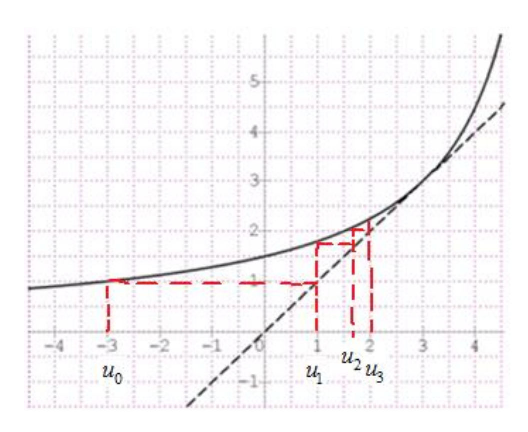
ولنا : $v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n+1-4v_n}{4} = \frac{1-v_n}{4} \le 0$ لان $v_n \ge 1$ ومنه (v_n) متناقصة تماما على ℕ.

ولنا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان .

☜ **استنتاج النهاية** : لدينا من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \le 1 \le v_n$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

حل التمرين 4 :

① أ) **تمثيل الحدود :**



ب) التخمين حول اتجاه التغير والتقارب :

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن (u_n) متزايدة تماما على ℕ و متقاربة .

ج) البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 3$

من اجل $n=0$: $u_0=-3\prec 3$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \prec 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1}\prec 3$)

لدينا : $u_n\prec 3$ تكافئ : $-u_n\succ -3$ تكافئ : $6-u_n\succ 3$ تكافئ : $\frac{1}{6-u_n}\prec\frac{1}{3}$ تكافئ : $\frac{9}{6-u_n}\prec\frac{9}{3}$ ومنه : $u_{n+1}\prec 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\prec 3$.

③ أ) **بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي** n : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{9}{6-u_n}-u_n=\frac{9-u_n(6-u_n)}{6-u_n}=\frac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$

ب) **استنتاج اتجاه تغير المتتالية** (u_n) **:**

لدينا : $u_n\prec 3$ اذن : $6-u_n\succ 0$ ولنا $(u_n-3)^2\succ 0$ اذن $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) **استنتاج أن المتتالية** (u_n) **متقاربة** : المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 3 فهي متقاربة .

④ لدينا المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$

أ) **بيان ان** (v_n) **متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :**

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\frac{9-18+3u_n}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$=\frac{1}{\frac{-9+3u_n}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n}{-9+3u_n}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{3}{3(u_n-3)}=\frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)}=\frac{-u_n+3}{3(u_n-3)}=\frac{-(u_n-3)}{3(u_n-3)}=\frac{-1}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{-1}{3}$

☜ **حساب حدها الأول :**

$$v_0=\frac{1}{u_0-3}=\frac{1}{-3-3}=\frac{-1}{6}$$

ب) **التعبير عن** v_n **بدلالة** n **:**

$$v_n=v_0+nr=\frac{-1}{6}-\frac{1}{3}n$$

ت) **استنتاج عبارة** u_n **بدلالة** n **:**

لدينا : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ تكافئ : $\frac{1}{v_n}=u_n-3$ تكافئ : $u_n=\frac{1}{v_n}+3$ ومنه : $u_n=\frac{1}{\frac{-1}{6}-\frac{1}{3}n}+3$.

☜ **حساب النهاية :**

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{-1}{6}-\frac{1}{3}n}+3=0+3=3$$

.

حل التمرين 5 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{11}{4}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n-4$.

1) حساب u_1 و u_2 : $u_1=3u_0-4=3\times\frac{11}{4}-4=\frac{17}{4}$ و $u_2=3u_1-4=3\times\frac{17}{4}-4=\frac{35}{4}$

2) أ - البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n\succ 2$

☜ من اجل $n=0$: $u_0=\frac{11}{4}\succ 2$ محققة .

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n\succ 2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1}\succ 2$)

لدينا : $u_n\succ 2$ تكافئ : $3u_n\succ 6$ تكافئ : $3u_n-4\succ 2$ ومنه $u_{n+1}\succ 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n\succ 2$.

ب – دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

$u_{n+1}-u_n=3u_n-4-u_n=2u_n-4=2(u_n-2)\succ 0$ لان $u_n\succ 2$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3) لدينا المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=4u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ- تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول :

$$v_{n+1}=4u_{n+1}+\alpha=4(3u_n-4)+\alpha=12u_n-16+\alpha=3(4u_n+\alpha)-3\alpha+\alpha-16=3v_n-2\alpha-16$$

(v_n) هندسية أساسها 3 من أجل $-2\alpha-16=0$ أي : $\alpha=-8$.

☜ حساب الحد الاول : $v_0=4u_0-8=4\times\frac{11}{4}-8=3$

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=3\times 3^n=3^{n+1}$

- استنتاج u_n بدلالة n : لدينا : $v_n=4u_n-8$ تكافئ : $u_n=\frac{v_n+8}{4}$ ومنه : $u_n=\frac{3^{n+1}+8}{4}$.

جـ - دراسة تقارب المتتالية (u_n) : لنا $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}+8}{4}=+\infty$ ومنه المتتالية (u_n) متباعدة.

4) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{u_n}{4^n}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

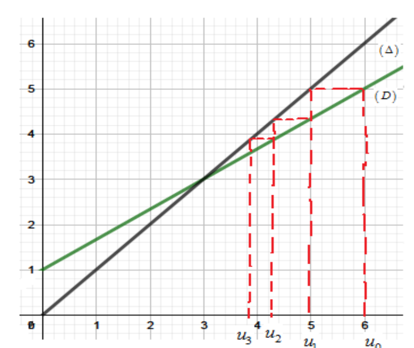
$$\frac{u_n}{4^n}=\frac{\frac{3^{n+1}+8}{4}}{4^n}=\frac{3^{n+1}+8}{4}\times\frac{1}{4^n}=\frac{3^{n+1}+8}{4^{n+1}}=\frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}+\frac{8}{4^{n+1}}=\frac{3\times 3^n}{4\times 4^n}+\frac{8}{4\times 4^n}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{4^n}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

☜ حساب المجموع : $S_n=\frac{u_0}{4^0}+\frac{u_1}{4^1}+\frac{u_2}{4^2}+\dots+\frac{u_n}{4^n}$

$$S_n=\frac{u_0}{4^0}+\frac{u_1}{4^1}+\frac{u_2}{4^2}+\dots+\frac{u_n}{4^n}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0+2\left(\frac{1}{4}\right)^0+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1+2\left(\frac{1}{4}\right)^1+\dots+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1+\dots+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^0+2\left(\frac{1}{4}\right)^1+\dots+2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{3}{4}}+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}$$
$$=3\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)+\frac{8}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

حل التمرين 6 :

لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$



1) أ - التمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :

2) وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومتقاربة .

ب - البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ 3$

من اجل $n=0$: $u_0 = 6 \succ 3$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \succ 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \succ 3$)

لدينا : $u_n \succ 3$ تكافئ : $\frac{2}{3}u_n \succ 2$ تكافئ : $\frac{2}{3}u_n + 1 \succ 3$ ومنه : $u_{n+1} \succ 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ 3$.

ج - دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : ندرس اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = \frac{-1}{3}u_n + 1 = \frac{3 - u_n}{3}$$

بما أن $u_n \succ 3$ فان $3 - u_n \prec 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \prec 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- **استنتاج انها متقاربة :** لدينا (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 3 هي متقاربة .

3) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) حيث : $v_n = 2^n.3^{1-n}$.

أ- بيان ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وتعيين حدها الأول :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1} \times 3^{1-(n+1)}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2^{n+1} \times 3^{-n}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2^n \times 2 \times 3^{-n}}{2^n \times 3 \times 3^{-n}} = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

- **تعيين الحد الاول لـ (v_n) :** $v_0 = 2^0.3^{1-0} = 3$

ب- البرهان أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $v_n = u_n - 3$.

من اجل $n=0$: $v_0 = u_0 - 3$ أي : $3 = 6 - 3$ ومنه $3 = 3$ محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ($v_n = u_n - 3$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ ($v_{n+1} = u_{n+1} - 3$)

لدينا : $v_{n+1} = 2^{n+1}.3^{1-(n+1)}$ تكافئ : $v_{n+1} = 2^{n+1}.3^{-n}$ ....(1)

ومن جهة أخرى لدينا :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}(v_n + 3) - 2 = \frac{2}{3}\left(2^n \times 3^{1-n} + 3\right) - 2$$

$$= \frac{2^{n+1} \times 3^{1-n} + 6}{3} - 2 = 2^{n+1} \times 3^{-n} + 2 - 2 = 2^{n+1} \times 3^{-n}$$

أي : $u_{n+1} - 3 = 2^{n+1} \times 3^{-n}$ ....(2)

من (1) و (2) نجد : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان: $v_n = u_n - 3$.

• استنتاج النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n+3) = \lim_{n\to+\infty}\left[3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\right] = 3\times 0+3=3$$

4) لتكن (w_n) متتالية معرفة على ℕ كمايلي : $w_n=\ln(v_n)$

أ- بيان أن (w_n) متتالية حسابية يطلب وتعيين أساسها وحدها الاول :

$$w_{n+1}=\ln(v_{n+1})=\ln\left(3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=\ln\left(3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$=\ln\left(3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln(v_n)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)=w_n+\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

ب- بيان ان : $S_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+n-1$: لدينا

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}+\frac{3}{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1+\frac{3}{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+.....+\frac{u_n}{v_n}=1+\left(\frac{3}{2}\right)^0+1+\left(\frac{3}{2}\right)^1+1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+....+1+\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+....+\left(\frac{3}{2}\right)^n+1+1+1+....+1$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^0\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{3}{2}}+1\times(n-0+1)=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}+(n+1)\ ،$$

$$=-2\times\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)+n+1=-2+2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+n+1$$

$$=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+n-1$$

حل التمرين 7 :

f دالة عددية معرفة على $]-3;6]$ حيث : $f(x)=-3+\sqrt{x+3}$

① بيان ان f متزايدة على المجال $]-3;6]$:

من أجل كل $x\in]-3;6]$: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\succ 0$

بما ان $f'(x)\succ 0$ فان الدالة f متزايدة تماما على $]-3;6]$.

② تعيين الحلول في المجال $]-3;6]$ للمعادلة $f(x)=x$:

$f(x)=x$ تكافئ : $-3+\sqrt{x+3}=x$ تكافئ : $-3+\sqrt{x+3}-x=0$ تكافئ : $\sqrt{x+3}-(x+3)=0$

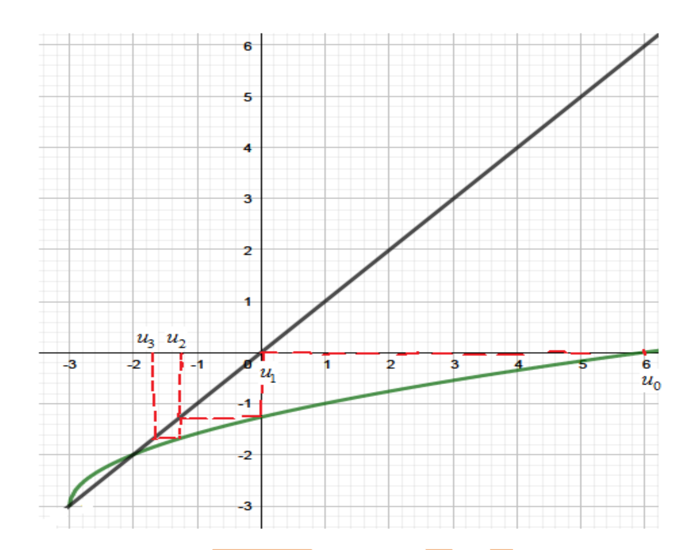
تكافئ $\frac{\left(\sqrt{x+3}-(3+x)\right)\left(\sqrt{x+3}+(3+x)\right)}{\sqrt{x+3}+(3+x)}=0$ تكافئ $\frac{x+3-(3+x)^2}{\sqrt{x+3}+(3+x)}=0$

تكافئ $\frac{x+3-9-6x-x^2}{\sqrt{x+3}+(3+x)}=0$ تكافئ $\frac{-x^2-5x-6}{\sqrt{x+3}+(3+x)}=0$

تكافئ : $\begin{cases} -x^2-5x-6=0 \\ \sqrt{x+3}+(3+x)\neq 0 \end{cases}$

حساب المميز Δ : $\Delta=(-5)^2-4\times(-1)(-6)=1$ ومنه : $\begin{cases} x_1=\dfrac{-(-5)+1}{2(-1)}=-3 \\ x_2=\dfrac{-(-5)-1}{2(-1)}=-2 \end{cases}$ أي : $S=\{-3;-2\}$

③ **رسم المنحنى (C)** : المنحنى (C) هو صورة لتمثيل الدالة مقلوب بانسحاب شعاعه $\vec{v}(-3,-3)$.



④ **تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل :** موضح في الشكل .

- **التخمين حول اتجاه التغير والتقارب :**

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة .

⑤ **البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي** n : $u_n \succ -2$

من اجل $n=0$: $u_0=6\succ -2$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \succ -2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1}\succ -2$)

لدينا : $u_n\succ -2$ تكافئ : $u_n+3\succ 1$ تكافئ : $\sqrt{u_n+3}\succ 1$ تكافئ : $-3+\sqrt{u_n+3}\succ -3+1$ ومنه : $u_{n+1}\succ -2$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ -2$

⑥ **بيان ان المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتاج أنها متقاربة:**

من السؤال (2) نجد

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{-u_n^2-5u_n-6}{\sqrt{u_n+3}+(u_n+3)}$$

لنا $\Delta=1$ ، $x_1=-3$ ، $x_2=-2$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+3)(u_n+2)}{\sqrt{u_n+3}+(u_n+3)}$

بما ان : $u_n\succ -2$ فان $u_n+2\succ 0$ و $u_n+3\succ 0$ و $-1\prec 0$ و $\sqrt{u_n+3}+(u_n+3)\succ 0$

ومنه : $u_{n+1}-u_n\prec 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- **استنتاج تقاربها :**

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 2- اذن هي متقاربة .

⑦ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $v_n=\ln(u_n+3)$

أ- بيان ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و تعيين حدها الأول :

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+3)=\ln\left(-3+\sqrt{u_n+3}+3\right)=\ln\left(\sqrt{u_n+3}\right)=\ln\left((u_n+3)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln(u_n+3)=\frac{1}{2}v_n$$

- **تعيين حدها الأول :** $v_0=\ln(u_0+3)=\ln(6+3)=\ln(9)=\ln(3^2)=2\ln(3)$

ب- **كتابة عبارة** v_n **بدلالة** n**:** $v_n=v_0\times q^n$ وبالتالي $v_n=2\ln(3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- **استنتاج عبارة** u_n **بدلالة** n**:**

لدينا $v_n=\ln(u_n+3)$ تكافئ : $e^{v_n}=u_n+3$ تكافئ : $u_n=e^{v_n}-3$ ومنه : $u_n=e^{2\ln(3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}-3$.

- **حساب النهاية :**

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[e^{2\ln(3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}-3\right]=e^0-3=1-3=-2$$

جـ- **حساب الجداء** P_n **بدلالة** n **:**

لدينا $w_n=u_n+3$ أي $w_n=e^{v_n}-3+3$ ومنه $w_n=e^{v_n}$

ومنه :

$$p_n=w_0\times w_1\times\ldots\times w_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\ldots e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

$$=e^{2\ln(3)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}}=e^{2\ln(3)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}}$$

$$=e^{4\ln(3)\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

حل التمرين 8 :

☜ f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f **:**

من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{2\sqrt{x^2+3}}$

$f'(x)\geq 0$ لأن $x\geq 0$ و $2\sqrt{x^2+3}\geq 0$ على المجال $[0;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) بيان أنه من اجل كل x **من** $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$

لدينا f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ اذن من أجل كل $x\in[0;+\infty[$:

$f(x)\geq f(0)$ أي $f(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $f(x)\geq 0$

☜ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

3) حساب الحدين u_1 **و** u_2**:**

$$u_1=\frac{1}{2}\sqrt{u_0^{\,2}+3}=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad و \quad u_2=\frac{1}{2}\sqrt{u_1^{\,2}+3}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+3}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

4) أ- **بيان أنه من اجل كل عدد طبيعي** n : $0\leq u_n\prec u_{n+1}\prec 1$.

من اجل $n=0$: $0\leq u_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\prec u_1=\frac{\sqrt{15}}{4}\prec 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0\le u_n \prec u_{n+1}\prec 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0\le u_{n+1}\prec u_{n+2}\prec 1$)

لدينا : $0\le u_n \prec u_{n+1}\prec 1$ تكافئ : $0\le u^2{}_n \prec u^2{}_{n+1}\prec 1$ تكافئ : $3\le u^2{}_n+3\prec u^2{}_{n+1}+3\prec 4$

تكافئ : $\sqrt{3}\le \sqrt{u^2{}_n+3}\prec \sqrt{u^2{}_{n+1}+3}\prec 2$ تكافئ : $\frac{\sqrt{3}}{2}\le \frac{1}{2}\sqrt{u^2{}_n+3}\prec \frac{1}{2}\sqrt{u^2{}_{n+1}+3}\prec 1$ ومنه : $0\le u_{n+1}\prec u_{n+2}\prec 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\prec u_{n+1}\prec 1$.

ب – استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة :

لدينا $0\le u_n\prec u_{n+1}\prec 1$ أي $u_n\prec u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1}-u_n\succ 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما وكذلك محدودة من الاعلى بالعدد 1 اذن هي متقاربة .

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن (u_n) متقاربة فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

بالتعويض نجد : $l=\frac{1}{2}\sqrt{l^2+3}$ تكافئ $2l=\sqrt{l^2+3}$ تكافئ $\begin{cases}4l^2=l^2+3\\ و\\ l\ge 0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}3l^2=+3\\ و\\ l\ge 0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}l^2=1\\ و\\ l\ge 0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}l=1 \text{ أو } l=-1\\ و\\ l\ge 0\end{cases}$ أي: $l=1$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

☜ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n^2-1$

5) **بيان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول :**

$$v_{n+1}=\left(u_{n+1}^2-1\right)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+3}\right)^2-1=\frac{1}{4}\left(u_n^2+3\right)-1=\frac{1}{4}u_n^2+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{4}u_n^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(u_n^2-1\right)=\frac{1}{4}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

- **تعيين حدها الاول :** $v_0=u_0^2-1=0^2-1=-1$

6) **التعبير عن v_n بدلالة n:** لنا $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=-\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- **استنتاج عبارة u_n بدلالة n:** لنا $v_n=u_n^2-1$ تكافئ : $v_n+1=u_n^2$ تكافئ : $u_n=\sqrt{v_n+1}$ وبالتالي $u_n=\sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}$

7) **حساب نهاية المتتالية (u_n):**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}=\sqrt{-0+1}=1$$

8) **التعبير عن المجاميع التالية بدلالة n:**

$$S_n=(u_0-1)(u_0+1)+(u_1-1)(u_1+1)+(u_2-1)(u_2+1)+\ldots+(u_n-1)(u_n+1)$$
$$=u_0^2-1^2+u_1^2-1^2+u_2^2-1^2+\ldots..+u_n^2-1^2$$
$$=v_0+v_1+v_2+\ldots.+v_n$$
$$=-1\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{4}}=-1\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{-4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$S'_n=\left(u_0^2-0\right)+\left(u_1^2-1\right)+\left(u_2^2-2\right)+\ldots+\left(u_n^2-n\right)$$
$$=\left(v_0+1-0\right)+\left(v_1+1-1\right)+\left(v_2+1-2\right)+\ldots.+\left(v_n+1-n\right)$$
$$=v_0+v_1+v_2+\ldots.+v_n+1+0+\left(-1\right)+\ldots+\left(1-n\right)$$
$$=S_n+\frac{n-0+1}{2}\left(1+1-n\right)$$
$$=\frac{-4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+\frac{(n+1)(2-n)}{2}$$
$$=\frac{-4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+\frac{-n^2+n+2}{2}$$

حل التمرين 9 :

☜ نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

① **التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n ،** $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

$$u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$$

② أ) **البرهان انه من اجل كل عدد طبيعي n ،** $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$

من اجل $n=0$: $0\prec u_0=\frac{1}{5}\prec\frac{1}{2}$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0\prec u_{n+1}\prec\frac{1}{2}$)

لدينا : $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$ تكافئ : $2\times0+1\prec 2u_n+1\prec 2\times\frac{1}{2}+1$ تكافئ : $1\prec 2u_n+1\prec 2$ تكافئ : $\frac{1}{2}\prec\frac{1}{2u_n+1}\prec 1$

تكافئ : $-1\prec-\frac{1}{2u_n+1}\prec-\frac{1}{2}$ تكافئ $1-1\prec 1-\frac{1}{2u_n+1}\prec 1-\frac{1}{2}$ تكافئ $0\prec u_{n+1}\prec\frac{1}{2}$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n ، $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$

ب) **التحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n ،** $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-u_n\left(2u_n+1\right)}{2u_n+1}=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{-2u_n^2+u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n\left(1-2u_n\right)}{2u_n+1}$$

- **بيان ان المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة:**

لنا $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$ تكافئ $-2\times0\prec-2u_n\prec-2\times\frac{1}{2}$ تكافئ $1-0\prec 1-2u_n\prec 1-1$ تكافئ $0\prec 1-2u_n\prec 1$ اذن :

$1-2u_n\succ 0$ وكذلك $2u_n+1\succ 0$ و $u_n\succ 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ومنه المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج) **استنتاج تقارب المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$:**

المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

- **تعيين نهايتها :**

بما أن $\left(u_n\right)$ متقاربة فان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

• بالتعويض نجد : $l=\frac{2l}{2l+1}$ تكافئ $\begin{cases} l\left(2l+1\right)=2l \\ \text{و} \\ 2l+1\neq 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2l^2+l=2l \\ \text{و} \\ l\neq \frac{-1}{2} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2l^2-l=0 \\ \text{و} \\ l\neq \frac{-1}{2} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} l\left(2l-1\right)=0 \\ \text{و} \\ l\neq \frac{-1}{2} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} l=0 \quad \text{أو} \quad l=\frac{1}{2} \\ \text{و} \\ l\neq \frac{-1}{2} \end{cases}$

بما ان $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما فان $l=\frac{1}{2}$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

③ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

ا) **اثبات ان المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها 6:**

$$v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3^{n+1}\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{3^{n+1}.2u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}=\frac{3^{n+1}.2u_n}{2u_n+1}\times\frac{2u_n+1}{2u_n-1}$$

$$=\frac{3^{n+1}.2u_n}{2u_n-1}=\frac{3^n\times 3\times 2u_n}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n u_n}{2u_n-1}=6v_n$$

ب) **كتابة v_n بدلالة n:**

لنا $v_n=v_0\times q^n$ و $v_0=\frac{3^0 u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{-1}{3}$ ومنه $v_n=\frac{-1}{3}\times 6^n=\frac{-6^n}{3}$.

• **استنتاج ان** $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$:

لدينا $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ تكافئ $v_n\left(2u_n-1\right)=3^n u_n$ تكافئ $2u_n v_n-v_n=3^n u_n$ تكافئ $2u_n v_n-3^n u_n=v_n$

تكافئ $u_n\left(2v_n-3^n\right)=v_n$ تكافئ $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$

بالتعويض نجد :

$$u_n=\frac{\frac{-6^n}{3}}{2\times\frac{-6^n}{3}-3^n}=\frac{\frac{-\left(2\times 3\right)^n}{3}}{2\times\frac{-\left(2\times 3\right)^n}{3}-3^n}=\frac{\frac{-2^n\times 3^n}{3}}{2\times\frac{-2^n\times 3^n}{3}-3^n}=\frac{\frac{-2^n\times 3^n}{3}}{\frac{-2^{n+1}\times 3^n-3^{n+1}}{3}}$$

$$=\frac{-2^n\times 3^n}{3}\times\frac{3}{-2^{n+1}\times 3^n-3^{n+1}}=\frac{-2^n\times 3^n}{-2^{n+1}\times 3^n-3^{n+1}}=\frac{-3^n\times 2^n}{-3^n\left(2^{n+1}+3^1\right)}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$$

ج) **حساب النهاية** :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3+2^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(\frac{3}{2^n}+2^1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{3}{2^n}+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

د) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + ... + \frac{1}{u_n}$.

لنا $\frac{1}{u_n} = \frac{3+2^{n+1}}{2^n} = \frac{3}{2^n} + \frac{2^{n+1}}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

ومنه :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + ... + \frac{1}{u_n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 + ... + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + ... + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 + 2 + ... + 2$$

$$= 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}} + 2(n-0+1) = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + 2(n+1)$$

$$= 6 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1)$$

حل التمرين 10 :

-1 ا) **البرهان بالتراجع على انه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0 \prec u_n \prec 1$:**

☜ من أجل $n = 0$ لنا : $0 \prec u_0 = \frac{1}{2} \prec 1$ محققة .

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من اجل $n+1$ (أي نبرهن من أجل كل عدد طبيعي n $0 \prec u_{n+1} \prec 1$).

لنا من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$ ....(1)

لدينا $0 \prec u_n \prec 1$ أي $-2 \prec -2u_n \prec 0$ ومنه : $1 \prec 3-2u_n \prec 3$ ......(2)

من (1) و(2) نجد : $0 \prec \frac{u_n}{3-2u_n} \prec 1$ أي : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

ومنه : الخاصية صحيحة من اجل $n+1$

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0 \prec u_n \prec 1$.

ب) **بيان ان (u_n) متناقصة تماما على □ :**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3-2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(3-2u_n)}{3-2u_n} = \frac{u_n - 3u_n + 2u_n^2}{3-2u_n} = \frac{2u_n^2 - 2u_n}{3-2u_n} = \frac{2u_n(u_n-1)}{3-2u_n}$$

لنا : $0 \prec u_n \prec 1$ أي : $2u_n \succ 0$ و $-1 \prec u_n - 1 \prec 0$ أي : $u_n - 1 \prec 0$ ولنا : $1 \prec 3-2u_n \prec 3$ أي : $3-2u_n \succ 0$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \prec 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على □ .

ج) **استنتاج ان (u_n) متقاربة :** لنا (u_n) متناقصة تماما على □ ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة .

-2 أ - **بيان ان (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$ وحساب حدها الأول :**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n}-1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{3u_n-3}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{u_n-1} = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{3}$.

حساب الحد الأول : $v_0 = \frac{u_0}{u_0-1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1$.

ب – كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{u_n-1}$ تكافئ : $v_n\left(u_n-1\right)=u_n$ تكافئ : $v_nu_n - v_n = u_n$ تكافئ : $v_nu_n-u_n=v_n$ تكافئ : $u_n\left(v_n-1\right)=v_n$

تكافئ : $u_n=\frac{v_n}{v_n-1}$ ومنه : $u_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}+1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}} = \frac{1}{3^n}\times\frac{3^n}{1+3^n} = \frac{1}{1+3^n}$

ج- حساب نهاية المتتالية $\left(u_n\right)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+3^n}=0$ (لان : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$)

د- حساب المجموع S_n :

$$S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{1+3^0}}+\frac{1}{\frac{1}{1+3^1}}+.....+\frac{1}{\frac{1}{1+3^n}}$$

$$=1+3^0+1+3^1+...+1+3^n = 1+1+...+1+3^0+3^1+...+3^n$$

$$=1\times\left(n-0+1\right)+3^0\times\frac{3^{n-0+1}-1}{3-1} = n+1+\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

$$=n+1+\frac{1}{2}\times\left(3^{n+1}-1\right)$$

حل التمرين 11 :

$\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\alpha$ حيث α عدد حقيقي ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$

I) تعيين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون $\left(u_n\right)$ متتالية ثابتة :

$\left(u_n\right)$ متتالية ثابتة معناه $u_{n+1}=u_n=u_0$ ومنه $u_{n+1}=u_n=\alpha$

بالتعويض نجد $\alpha=\frac{1}{2}\alpha-2$ تكافئ $\frac{1}{2}\alpha=-2$ تكافئ $\alpha=-4$.

II) فيما يلي نفرض أن $u_0=3$.

① **حساب** u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1=\frac{1}{2}u_0-2=\frac{1}{2}\times3-2=\frac{-1}{2}$ و $u_2=\frac{1}{2}u_1-2=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}-2=\frac{-9}{4}$ و $u_3=\frac{1}{2}u_2-2=\frac{1}{2}\times\frac{-9}{4}-2=\frac{-25}{8}$

- **تخمين اتجاه تغير المتتالية** $\left(u_n\right)$:

نلاحظ أن $u_3 \prec u_2 \prec u_1$ فنخمن أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما على □.

② **البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان :** $u_n\geq-4$

من اجل $n=0$: $u_0=3\geq-4$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n\geq-4$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1}\geq-4$)

لدينا : $u_n\geq-4$ تكافئ : $\frac{1}{2}u_n\geq-2$ تكافئ : $\frac{1}{2}u_n-2\geq-4$ ومنه $u_{n+1}\geq-4$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n\geq-4$.

③ **دراسة اتجاه تغير المتتالية** $\left(u_n\right)$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-2-u_n=\frac{-1}{2}u_n-2=\frac{-u_n-4}{2}$$

لنا $u_n\geq-4$ تكافئ $-u_n\leq4$ تكافئ $-u_n-4\leq0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\leq0$ ومنه المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما على □ .

④ استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :

لدينا (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 4- فهي متقاربة .

- **حساب نهايتها :**

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فان $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بالتعويض نجد : $l = \frac{1}{2}l - 2$ تكافئ $\frac{1}{2}l = -2$ تكافئ $l = -4$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$.

☜ لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + 4$

أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

- **تعيين الحد الأول :** $v_0 = u_0 + 4 = 3 + 4 = 7$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n: لنا $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ج)اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$:

لدينا : $v_n = u_n + 4$ ومنه $u_n = v_n - 4$ وبالتعويض نجد $u_n = 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$.

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 = 7\times 0 - 4 = -4$.

د) حساب بدلالة n ، المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\
&= v_0 - 4 + v_1 - 4 + v_2 - 4 + ... + v_n - 4 \\
&= v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n + (-4) + (-4) + (-4) + ... + (-4) \\
&= 7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}} + (-4)(n-0+1) \\
&= 7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} - 4(n+1) = 14\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 4(n+1)
\end{aligned}$$

حل التمرين 12 :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3:

$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4}\times 6 + 3 = \frac{9}{2}$ و $u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{1}{4}\times\frac{9}{2} + 3 = \frac{33}{8}$ و $u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 3 = \frac{1}{4}\times\frac{33}{8} + 3 = \frac{129}{32}$

2) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq 4$.

من اجل $n = 0$: $u_0 = 6 \geq 4$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \geq 4$) صحيحة ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \geq 4$)

لدينا : $u_n \ge 4$ تكافئ : $\frac{1}{4}u_n \ge 1$ تكافئ : $\frac{1}{4}u_n + 3 \ge 4$ ومنه $u_{n+1} \ge 4$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \ge 4$.

3) بيان ان (u_n) متتالية متناقصة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n=\frac{-3}{4}u_n+3=\frac{-3u_n+12}{4}=\frac{-3(u_n-4)}{4}$$

لنا $u_n \ge 4$ تكافئ $u_n-4\ge 0$ و $-3 \prec 0$ و $4 \succ 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n \le 0$ ومنه المتتالية (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- لنا (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل بالعدد 4 ومنه المتتالية (u_n) متقاربة.

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 4$

أ) بيان أن (v_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-4=\frac{1}{4}u_n+3-4=\frac{1}{4}u_n-1=\frac{1}{4}(u_n-4)=\frac{1}{4}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

- **تعيين الحد الأول :** $v_0=u_0-4=6-4=2$.

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n: لنا $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- **حساب النهاية :** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=2\times0=0$

ج)البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$:

لدينا : $v_n=u_n-4$ ومنه $u_n=v_n+4$ وبالتعويض نجد $u_n=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$.

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+4=2\times0+4=4$.

د) حساب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+u_2+...+u_n\\&=v_0+4+v_1+4+v_2+4+...+v_n+4\\&=v_0+v_1+v_2+...+v_n+4+4+4+...+4\\&=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{4}}+4(n-0+1)=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}+4(n+1)\\&=\frac{8}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+4(n+1)\end{aligned}$$

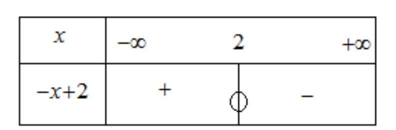
حل التمرين 13 :

☜ لتكن f دالة معرفة على المجال $[0;2]$ كمايلي : $f(x)=-x^2+2x$

- **دراسة اتجاه تغير الدالة f :**

من أجل كل $[0;2]$: $f'(x)=-2x+2=2(-x+2)$

$f'(x)\ge0$ لأن $x\in[0;2]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$.



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	+	0	−

☜ (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{8}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=-u_n^2+2u_n$

① أ- **البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان $0\prec u_n\prec 1$:**

من اجل $n=0$: $0\prec u_0=\frac{1}{8}\prec 1$ محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0\prec u_n\prec 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0\prec u_{n+1}\prec 1$)

لدينا : $0\prec u_n\prec 1$ وبما أن f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$ فان $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$ ومنه : $0\prec u_{n+1}\prec 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان $0\prec u_n\prec 1$.

ب - **بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة :**

$$u_{n+1}-u_n=-u_n^2+2u_n-u_n=-u_n^2+u_n=u_n(-u_n+1)$$

لنا $0\prec u_n\prec 1$ ومنه $-1\prec -u_n\prec 0$ أي $0\prec -u_n+1\prec 1$ ومنه $-u_n+1\succ 0$

و لنا $u_n\succ 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\succ 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على ℕ.

☜ **الاستنتاج :** المتتالية (u_n) متزايدة تماما على ℕ ومحدودة من الاعلى بالعدد 1 فهي متقاربة .

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على ℕ كمايلي : $v_n=1-u_n$

أ- **بيان انه من اجل كل عدد طبيعي n :** $v_{n+1}=(v_n)^2$

من اجل $n=0$: لنا $v_0=1-u_0=\frac{7}{8}$ و $v_1=1-u_1=1-\left(-\left(\frac{1}{8}\right)^2+2\times\frac{1}{8}\right)=\frac{49}{64}$ ومنه : $v_1=(v_0)^2$ "الخاصية محققة ".

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $v_{n+1}=(v_n)^2$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $v_{n+2}=(v_{n+1})^2$)

$$v_{n+2}=1-u_{n+2}=1-\left(-u_{n+1}^2+2u_{n+1}\right)=1+u_{n+1}^2-2u_{n+1}=(1-u_{n+1})^2=(v_{n+1})^2$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=(v_n)^2$

ب- **البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n:** $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

من اجل $n=0$: لنا $v_0=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}=\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{8}$ "الخاصية محققة ".

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$)

لنا : $v_{n+1}=(v_n)^2=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n\times 2}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

ج - **حساب النهاية :**

لنا : $v_n=1-u_n$ ومنه $u_n=1-v_n=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)=1-0=1$.

حل التمرين 14 :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} + e^2 \\ eu_{n+1} - u_n = \dfrac{e-1}{2} \end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq \dfrac{1}{2}$:

من اجل $n = 0$: لنا $u_0 = \dfrac{1}{2} + e^2 \geq \dfrac{1}{2}$ "الخاصية محققة ".

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n \geq \dfrac{1}{2}$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$).

لدينا : $eu_{n+1} - u_n = \dfrac{e-1}{2}$ ومنه : $eu_{n+1} = u_n + \dfrac{e-1}{2}$ أي $u_{n+1} = \dfrac{1}{e}u_n + \dfrac{e-1}{2e}$.

ولنا : $u_n \geq \dfrac{1}{2}$ تكافئ $\dfrac{1}{e}u_n \geq \dfrac{1}{2e}$ تكافئ $\dfrac{1}{e}u_n + \dfrac{e-1}{2e} \geq \dfrac{1}{2e} + \dfrac{e-1}{2e}$ ومنه $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} - u_n = \left(\frac{1}{e} - 1\right)u_n + \frac{e-1}{2e} = \frac{1-e}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} = \frac{1-e}{e}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

لدينا : $u_n \geq \dfrac{1}{2}$ ومنه $u_n - \dfrac{1}{2} \geq 0$ ولنا $\dfrac{1-e}{e} \prec 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- **استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :**

المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد $\dfrac{1}{2}$ فهي متقاربة .

☜ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : $v_n = \ln\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$.

3) بيان أن (v_n) متتالية حسابية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1} = \ln\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n + \frac{e-1-e}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n - \frac{1}{2e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = -\ln e + v_n = -1 + v_n$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = -1$.

- **حساب الحد الأول :** $v_0 = \ln\left(u_0 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2} + e^2 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(e^2\right) = 2\ln e = 2$

4) **كتابة v_n بدلالة n:** لنا $v_n = v_0 + nr$ ومنه $v_n = 2 - n$.

5) أ- **حساب المجموع S_n بدلالة n:**

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \frac{n-0+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(2+2-n) = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$$

ب - **حساب المجموع T_n بدلالة n:**

لدينا : $v_n = \ln\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$ تكافئ $u_n - \dfrac{1}{2} = e^{v_n}$ تكافئ $u_n = e^{v_n} + \dfrac{1}{2}$

نضع $w_n = e^{v_n}$ لدينا : $e^{v_n} = e^{2-n} = e^2 \times e^{-n} = e^2 \times \frac{1}{e^n} = e^2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$ و منه (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ وحدها الاول $w_0 = e^2$

$$T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = e^{v_0} + \frac{1}{2} + e^{v_1} + \frac{1}{2} + \ldots. + e^{v_n} + \frac{1}{2}$$

$$= e^{v_0} + e^{v_1} + \ldots. + e^{v_n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2} = w_0 + w_1 + \ldots. + w_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2}$$

$$= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{e}} + \frac{1}{2}(n - 0 + 1)$$

$$= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}} + \frac{n+1}{2} = \frac{e^3}{e-1} \times \left[1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2}$$

حل التمرين 15 :

1) البرهان بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \le u_n \le 3$

من اجل $n = 0$: $\frac{3}{2} \le u_0 = 3 \le 3$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي $\frac{3}{2} \le u_n \le 3$) صحيحة (ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي $\frac{3}{2} \le u_{n+1} \le 3$)

لدينا : $\frac{3}{2} \le u_n \le 3$ تكافئ : $6 \le 4u_n \le 12$ تكافئ : $\frac{1}{12} \le \frac{1}{4u_n} \le \frac{1}{6}$ تكافئ : $\frac{-9}{12} \le \frac{-9}{4u_n} \le \frac{-9}{6}$ تكافئ : $\frac{-3}{4} \le \frac{-9}{4u_n} \le \frac{-3}{2}$

تكافئ : $3 - \frac{3}{4} \le 3 - \frac{9}{4u_n} \le 3 - \frac{3}{2}$ تكافئ : $\frac{9}{4} \le u_{n+1} \le \frac{3}{2}$ ومنه $\frac{3}{2} \le u_{n+1} \le 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وعليه : من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \le u_n \le 3$.

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n$$

$$= \frac{12u_n - 9 - u_n(4u_n)}{4u_n}$$

$$= \frac{-4u_n^2 + 12u_n - 9}{4u_n}$$

حساب المميز Δ: $\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-9) = 0$ ومنه : $x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \frac{-4\left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2}{4u_n}$

بما ان : $\frac{3}{2} \le u_n \le 3$ فان $-4\left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 \le 0$ و $4u_n \succ 0$ فان $u_{n+1} - u_n \le 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على □.

- **استنتاج تقارب المتتالية (u_n):**

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة .

☜ **حساب نهاية المتتالية** (u_n) :

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l

حيث : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$

لنا : $3-\frac{9}{4l}=l$ ومنه : $12l-9=4l^2$ حيث $l\neq 0$ تكافئ : $-4l^2+12l-9=0$

حساب المميز Δ: $\Delta=0$ ومنه : $x_0=\frac{3}{2}$ وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{3}{2}$.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على ℕ ب: $v_n=\frac{2}{2u_n-3}$

أ) **البرهان ان المتتالية** (v_n) **حسابية أساسها وتعيين أساسها :**

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{2u_{n+1}-3}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{2}{2\left(3-\frac{9}{4u_n}\right)-3}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{2}{6-\frac{18}{4u_n}-3}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{2}{3-\frac{9}{2u_n}}-\frac{2}{2u_n-3}$$

$$=\frac{2}{\frac{6u_n-9}{2u_n}}-\frac{2}{2u_n-3}=\frac{4u_n}{6u_n-9}-\frac{2\times3}{(2u_n-3)\times3}=\frac{4u_n}{6u_n-9}-\frac{6}{6u_n-9}=\frac{4u_n-6}{6u_n-9}=\frac{2(2u_n-3)}{3(2u_n-3)}=\frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{2}{3}$.

ب) **كتابة** v_n **بدلالة** n :

- **حساب الحد الاول** : $v_0=\frac{2}{2u_0-3}=\frac{2}{2\times3-3}=\frac{2}{3}$

لدينا : $v_n=v_0+nr$

ومنه: $v_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}n$

$=\frac{2+2n}{3}$

- **استنتاج** u_n **بدلالة** n :

لنا: $v_n=\frac{2}{2u_n-3}$ تكافئ : $\frac{1}{v_n}=\frac{2u_n-3}{2}$ تكافئ : $\frac{2}{v_n}=2u_n-3$ تكافئ : $2u_n=\frac{2}{v_n}+3$ تكافئ : $u_n=\frac{1}{v_n}+\frac{3}{2}$

تكافئ : $u_n=\frac{3}{2+2n}+\frac{3}{2}$ تكافئ : $u_n=\frac{3}{2(1+n)}+\frac{3}{2}$ تكافئ : $u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(1+n)}+1\right)$ تكافئ : $u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1+1+n}{1+n}\right)$

تكافئ : $u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

3) **حساب المجموع :**

لنا: $u_nv_n=\frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\times\frac{2+2n}{3}$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\times\frac{2(n+1)}{3}$

$=n+2$

ومنه :

$$S_n=u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{n-0+1}{2}(2+n+2)=\frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

حل التمرين 16 :

(u_n) متتالية عددية حدها الاول $u_1=\frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\frac{n}{4(n+1)}u_n$

① أ) **حساب الحدود** u_2 **و** u_3 :

$$u_2=\frac{1}{4(1+1)}u_1=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32} \quad \text{و} \quad u_3=\frac{2}{4(2+1)}u_2=\frac{1}{6}\times\frac{1}{32}=\frac{1}{192}$$

ب)**البرهان أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم** n : $u_n \succ 0$

من اجل $n=1$: $u_1=\frac{1}{4}\succ 0$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $u_n\succ 0$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $u_{n+1}\succ 0$)

لدينا : $u_n\succ 0$ تكافئ : $\frac{n}{4(n+1)}u_n\succ 0\times\frac{n}{4(n+1)}$ (لان $n\in\mathbb{N}^*$ فان $\frac{n}{4(n+1)}\succ 0$) ومنه $u_{n+1}\succ 0$.

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

اذن : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n\succ 0$

ج) **دراسة اتجاه تغير المتتالية** (u_n):

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n}{4(n+1)}u_n-u_n=\left(\frac{n}{4(n+1)}-1\right)u_n=\left(\frac{n-4\times(n+1)}{4(n+1)}\right)u_n=\left(\frac{n-4n-4}{4(n+1)}\right)u_n=\left(\frac{-3n-4}{4(n+1)}\right)u_n$$

لنا $n\in\mathbb{N}^*$ اذن $4(n+1)\succ 0$ و $-3n-4\prec 0$ ولدينا $u_n\succ 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\prec 0$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x-4$	$+$	0	$-$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

- **استنتاج ان** (u_n) **متقاربة** :

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد **0** فان (u_n) متقاربة .

- **حساب نهاية المتتالية** (u_n):

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي l حيث : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

بالتعويض نجد :

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{4(n+1)}u_n\right] \text{ تكافئ } l=\frac{1}{4}l \text{ تكافئ } l-\frac{1}{4}l=0 \text{ تكافئ } \frac{3}{4}l=0 \text{ تكافئ } l=0 \text{ ومنه } \lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

② **نعتبر المتتالية** (v_n) **المعرفة كمايلي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم** n : $v_n=n.2^n.u_n$

أ- بيان أن (v_n) هندسية و تعيين أساسها q وحدها الأول v_1:

$$v_{n+1}=(n+1).2^{n+1}.u_{n+1}=(n+1).2^{n+1}.\frac{n}{4(n+1)}u_n=2\times 2^n\times\frac{n}{4}u_n=\frac{1}{2}2^n\times n\times u_n=\frac{1}{2}v_n$$

- **حساب** v_1 : $v_1=1\times 2^1\times u_1=\frac{1}{2}$

ب- **كتابة** v_n **بدلالة** n : لنا $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ومنه $v_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ أي $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- **استنتاج** u_n **بدلالة** n :

لدينا $v_n=n.2^n.u_n$ تكافئ $u_n=\frac{v_n}{n.2^n}$ ومنه $u_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n.2^n}$

أي $u_n=\frac{1}{n}\times\frac{1}{2^n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

- اثبات تقارب المتتالية (u_n) :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]=0\times 0=0$ ومنه المتتالية متقاربة نحو العدد 0 .

③ حساب المجموع :

$$S_n = v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

- حساب الجداء :

$$p_n=u_1(2u_2)(3u_3)\ldots(nu_n)=\frac{1}{4}\times\left(2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right)\times\left(3\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\right)\times\ldots\times\left(n\times\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+4+6+\ldots+(2n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1+1}{2}(2+2n)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(2+2n)}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n(1+n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$$

حل التمرين (17) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كمايلي : $u_0=0$ ، $u_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n u_n$

① أ- بيان ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$:

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{5}u_{n+1}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n-\frac{1}{5}u_{n+1}=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n=\frac{1}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n=\frac{1}{5}\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)=\frac{1}{5}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

ب-كتابة v_n بدلالة n: لنا $v_n=v_0\times q^n$

حساب الحد الاول v_0 : $v_0=u_1-\frac{1}{5}u_0=1-\frac{1}{5}\times 0=1$ ومنه : $v_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$

② بيان ان (w_n) متتالية حسابية أساسها 5 :

$$w_{n+1}-w_n=5^{n+1}u_{n+1}-5^n u_n=5^{n+1}\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)=5^{n+1}v_n=5^{n+1}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n=5\times 5^n\times\frac{1}{5^n}=5$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها 5.

- كتابة w_n بدلالة n:

حساب الحد الاول : $w_0=5^0 u_0=1\times 0=0$

لنا: $w_n=w_0+nr=0+5n=5n$

③ حساب بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

$$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1-0+1}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right)$$

④ كتابة u_n بدلالة n : لنا $w_n=5^n u_n$ ومنه : $u_n=\frac{w_n}{5^n}$ أي $u_n=\frac{5n}{5^n}$ وبتالي $u_n=\frac{n}{5^{n-1}}$.

⑤ أ- بيان انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0\prec u_{n+1}\le\frac{2}{5}u_n$

لدينا $u_n=\frac{n}{5^{n-1}}$ ومنه $u_{n+1}=\frac{n+1}{5^n}\succ 0$ لان $n\in\mathbb{N}^*$.

ومن جهة أخرى $u_{n+1}-\frac{2}{5}u_n=\frac{n+1}{5^n}-\frac{2}{5}\times\frac{n}{5^{n-1}}=\frac{n+1}{5^n}-\frac{2n}{5^n}=\frac{-n+1}{5^n}\prec 0$ لان $n\in\mathbb{N}^*$ أي $u_{n+1}\le\frac{2}{5}u_n$

ومنه : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0\prec u_{n+1}\le\frac{2}{5}u_n$

ب-استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0\prec u_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

لدينا من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0\prec u_{n+1}\le\frac{2}{5}u_n$

من اجل $n=1$: $0\prec u_2\le\frac{2}{5}u_1$

من اجل $n=2$: $0\prec u_3\le\frac{2}{5}u_2$

من اجل $n=3$: $0\prec u_4\le\frac{2}{5}u_3$

$\vdots$

من اجل $n-1$: $0\prec u_n\le\frac{2}{5}u_{n-1}$

بضرب المتباينات(علما أنها موجبة) نجد: $0\prec u_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1-1+1}u_1$ ومنه $0\prec u_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج-استنتاج نهاية المتتالية (u_n):

لدينا : $0\prec u_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

حل التمرين 18 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$

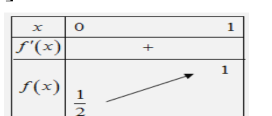
① أ) دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;1]$

- المشتقة واتجاه التغير: من أجل كل $x\in[0;1]$

$$f'(x)=\frac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2}=\frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2}=\frac{10}{(x+4)^2}\succ 0$$

بما أن $f'(x)\succ 0$ فان f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

- جدول التغيرات :



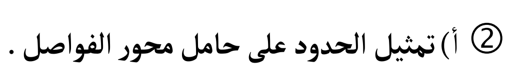
x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	1

ب) استنتاج أنه إذا كان $x\in[0;1]$ فان $f(x)\in[0;1]$:

$x\in[0;1]$ معناه $0\le x\le 1$ وبما أن f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فان $f(0)\le f(x)\le f(1)$ ومنه $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$

أي $0\le f(x)\le 1$ اذن $f(x)\in[0;1]$.

ج) التمثيل البياني للمنحنى (C):



② أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل .

ب) التخمين حول اتجاه وتقارب المتتالية (u_n):

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة .

③ أ) البرهان انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$

من اجل $n=0$: $0\le u_0=0\le 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n (أي : $0\le u_n\le 1$ صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي : $0\le u_{n+1}\le 1$)

لدينا : $0\le u_n\le 1$ تكافئ : $f(0)\le f(u_n)\le f(1)$ تكافئ : $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$ ومنه : $0\le u_{n+1}\le 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

اذن : من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$.

ب) بيان ان $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

- **استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):**

بما أن $0\le u_n\le 1$ فان $1-u_n\ge 0$ و $u_n+2\succ 0$ ومنه $(1-u_n)(u_n+2)\ge 0$ و $u_n+4\succ 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\ge 0$

أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما على ℕ.

ج) نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 1 .

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على ℕ كمايلي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$

أ) **البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :**

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2}=\frac{\frac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}}=\frac{\frac{2u_n-2}{u_n+4}}{\frac{5u_n+10}{u_n+4}}=\frac{2u_n-2}{u_n+4}\times\frac{u_n+4}{5u_n+10}$$

$$=\frac{2u_n-2}{5u_n+10}=\frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}=\frac{2}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{2}{5}v_n$$

- **حساب الحد الاول :** $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=\frac{0-1}{0+2}=\frac{-1}{2}$

ب) **كتابة عبارة v_n بدلالة n :**

لنا $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=\frac{-1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

- تعيين عبارة u_n بدلالة n :

لنا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ تكافئ : $v_n(u_n+2) = u_n - 1$ تكافئ $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$ تكافئ $1 + 2v_n = u_n - v_n u_n$

تكافئ $1+2v_n = u_n(1-v_n)$ وبالتالي $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$.

بالتعويض نجد : $u_n = \frac{1+2\left(\frac{-1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

ج)استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

حل التمرين 19 :

1) لنا : $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

أ- **حساب الحدود :**

$u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+3^2}{2}} = \sqrt{5}$ و $u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}^2}{2}} = \sqrt{3}$ و $u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{2}$

☜ **البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$**

من اجل $n=0$: $u_0 = 3 \succ 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$ تكافئ : $u_n^2 \succ 1$ تكافئ : $\frac{1+u_n^2}{2} \succ \frac{2}{2}$ تكافئ : $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} \succ 1$ تكافئ : $u_{n+1} \succ 1$.

اذن : الخاصية صحيحة من اجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$

ب- **بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على ℕ :**

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}^2 - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} =$$

$$\frac{\frac{1+u_n^2 - 2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1-u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1-u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

لنا $u_n \succ 1$ تكافئ : $u_n^2 \succ 1$ تكافئ : $-u_n^2 \prec -1$ تكافئ : $1 - u_n^2 \prec 0$

ولنا : $2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right) \succ 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n \prec 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على ℕ.

جـ - استنتاج ان (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

☜ **حساب النهاية :** بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

ومنه : $\sqrt{\dfrac{1+l^2}{2}} = l$ تكافئ : $\dfrac{1+l^2}{2} = l^2$ مع $l \geq 0$ تكافئ : $1+l^2 = 2l^2$ تكافئ : $l^2 = 1$

تكافئ : $l=1$ (مقبول) أو $l=-1$ (مرفوض). ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على ℕ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ- **بيان انه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $2v_{n+1} = v_n$.

☜ من اجل $n=0$: لدينا : $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ ولنا : $v_1 = u_1^2 - 1 = \sqrt{5}^2 - 1 = 4$ ومنه : $2v_1 = v_0$.

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي نبرهن أنه : $2v_{n+2} = v_{n+1}$)

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $2v_{n+2} = 2\left(u_{n+2}^2 - 1\right) = 2\left(\sqrt{\dfrac{1+u_{n+1}^2}{2}}^2 - 1\right) = 2\left(\dfrac{1+u_{n+1}^2 - 2}{2}\right) = u_{n+1}^2 - 1 = v_{n+1}$

ومنه : الخاصية صحيحة من اجل $n+1$.

اذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$.

ب- **استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول** v_0:

لنا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$ تكافئ : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$.

حساب v_0 : $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$

جـ - **كتابة v_n بدلالة** n : $v_n = v_0 \times q^n = 8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

- **كتابة u_n بدلالة** n : لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ تكافئ : $u_n^2 = v_n + 1$ تكافئ : $u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}$.

☜ **حساب النهاية :**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \sqrt{8\times 0 + 1} = \sqrt{0+1} = 1$$

3) **حساب المجموع :**

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$
$$= v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1$$
$$= v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 1 + \dots + 1$$
$$= v_0 \times \frac{1-(q)^{n-0+1}}{1-q} + 1\times(n-0+1)$$
$$= 8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}} + 1\times(n+1)$$
$$= 8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + (n+1)$$
$$= 16\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)$$

- حساب T_n:

$$T_n = v_0 + 2v_1 + \dots\dots\dots\dots + 2^n v_n$$
$$= 2^0 v_0 + 2v_1 + \dots\dots\dots\dots + 2^n v_n$$
$$= 2^0 \times 8 + 2 \times 8 \times \frac{1}{2} + \dots\dots + 2^n \times 8 \times \frac{1}{2^n}$$
$$= 8 + 8 + \dots\dots + 8$$
$$= 8 \times (n - 0 + 1)$$
$$= 8n + 8$$

حل تمرين 20 :

1- **حساب الحدود :**

$u_1 = \frac{1}{3} \times u_0 + 0 - 2 = \frac{-5}{3}$ ، $u_2 = \frac{1}{3} \times u_1 + 1 - 2 = \frac{-14}{9}$ ، $u_3 = \frac{1}{3} \times u_2 + 2 - 2 = \frac{-14}{27}$ ، $u_4 = \frac{1}{3} \times u_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81}$

2- **أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ فان $u_n \geq 0$:**

نسمي الخاصية من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ، $p(n): u_n \geq 0$.

☜ من اجل $n = 4$: $u_4 = \frac{67}{81} \geq 0$ محققة.

☜ نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا : $u_n \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3} u_n \geq 0$ ....(1)

بما ان $n \geq 4$ فان $n - 2 \geq 2$ ومنه $n - 2 \geq 0$ ....(2)

من (1) و(2) نجد: $\frac{1}{3} u_n + n - 2 \geq 0$ ومنه $u_{n+1} \geq 0$.

ومنه : $p(n+1)$ صحيحة .

اذن : الخاصية $p(n)$ صحيحة .

ب) استنتاج انه من اجل كل $n \geq 5$: $u_n \geq n - 3$

لدينا : $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ اذن $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} + n - 3$

لدينا من جل كل $n \geq 4$ فان $u_n \geq 0$ معناه من أجل $n \geq 5$ فان $u_{n-1} \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3} u_{n-1} \geq 0$ يكافئ $\frac{1}{3} u_{n-1} + n \geq n$

يكافئ $\frac{1}{3} u_{n-1} + n - 3 \geq n - 3$ ومنه $u_n \geq n - 3$

ج) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا $u_n \geq n - 3$ و $\lim_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$ ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3- لدينا : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ- **البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :**

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3} u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$$
$$= \frac{-2}{3} u_n - 2n + 4 + 3n - \frac{15}{2} = \frac{-2}{3} u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

- حساب الحد الاول :

$$v_0=-2u_0+3\times0-\frac{21}{2}=\frac{-25}{2}$$

ب - كتابة v_n بدلالة n:

$$v_n=v_0\times q^n=\frac{-25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

جـ - استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

لدينا $v_n=\frac{-25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومن جهة اخرى لنا $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ ومنه $\frac{-25}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$

تكافئ $2u_n=\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+3n-\frac{21}{2}$ تكافئ $u_n=\frac{25}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

④ حساب المجموع T_n بدلالة n :

$$T_n=v_0+v_1+.......+v_n=v_0\times\frac{1-(q)^{n-0+1}}{1-q}=\frac{-25}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{-25}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}=\frac{-75}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

- حساب المجموع S_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$ تكافئ $2u_n=-v_n+3n-\frac{21}{2}$ تكافئ $u_n=-\frac{1}{2}v_n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$ ومنه :

$$S_n=u_0+u_1+.......+u_n$$

$$=\frac{-1}{2}v_0+\frac{3}{2}\times0-\frac{21}{4}+\frac{-1}{2}v_1+\frac{3}{2}\times1-\frac{21}{4}+....+\frac{-1}{2}v_n+\frac{3}{2}\times n-\frac{21}{4}$$

$$=\frac{-1}{2}(v_0+v_1+....+v_n)+\left(\frac{3}{2}\times0-\frac{21}{4}+\frac{3}{2}\times1-\frac{21}{4}+....+\frac{3}{2}\times n-\frac{21}{4}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}T_n+\frac{n-0+1}{2}\left(-\frac{21}{4}+\frac{3}{2}\times n-\frac{21}{4}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{-75}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right)+\frac{n+1}{2}\left(\frac{6n-42}{4}\right)$$

$$=\frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n+1}{2}\left(\frac{3n-21}{2}\right)$$

$$=\frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{(n+1)(3n-21)}{4}$$

حل التمرين 21 :

1- أ) دراسة اتجاه تغير f على المجال $[0;+\infty[$: من اجل كل $x\in[0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times2x}{\sqrt{x^2+1}^2}=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{2(x^2+1)-2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{x^2+1}=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

بما ان $2\succ0$ و $\sqrt{x^2+1}\succ0$ و $x^2+1\succ0$ فان الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

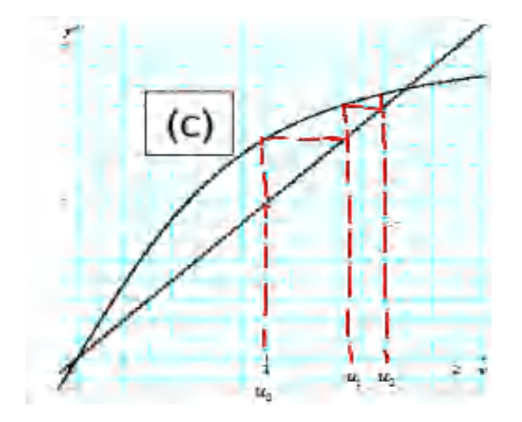
ب) بيان أنه اذا كان $x\in[1;\sqrt{3}]$ فان $f(x)\in[1;\sqrt{3}]$:

لدينا : $x\in[1;\sqrt{3}]$ معناه $1\le x\le\sqrt{3}$ وبما ان f متزايدة تماما على $[1;\sqrt{3}]$ فان $f(1)\le f(x)\le f(\sqrt{3})$

ومنه $2\le f(x)\le\sqrt{3}$ أي $1\le f(x)\le\sqrt{3}$ ومنه $f(x)\in[1;\sqrt{3}]$.

2- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

ا) تمثيل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل .



ب) اعطاء تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة.

3- **أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :** $1\le u_n\le\sqrt{3}$:

نسمي الخاصية من اجل كل عدد طبيعي n ، $p(n):1\le u_n\le\sqrt{3}$.

☜ من اجل $n=0$: $1\le u_0=1\le\sqrt{3}$ محققة .

☜ نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا : $1\le u_n\le\sqrt{3}$ وبما ان f متزايدة تماما على $[1;\sqrt{3}]$ فان $f(1)\le f(u_n)\le f(\sqrt{3})$

أي $2\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ ومنه $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$

ومنه : $p(n+1)$ صحيحة

اذن : الخاصية $p(n)$ صحيحة .

ب) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}-u_n=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

- **استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):**

لدينا $1\le u_n\le\sqrt{3}$ تكافئ $1\le u_n^2\le 3$ تكافئ $2\le u_n^2+1\le 4$ تكافئ $\sqrt{2}\le\sqrt{u_n^2+1}\le 2$ تكافئ $-2\le-\sqrt{u_n^2+1}\le-\sqrt{2}$

تكافئ $0\le 2-\sqrt{u_n^2+1}\le 2-\sqrt{2}$ ومنه $2-\sqrt{u_n^2+1}\ge 0$ ولنا $u_n\succ 0$ و $\sqrt{u_n^2+1}\succ 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\ge 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما ان (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد $\sqrt{3}$ فهي متقاربة .

4- (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ) البرهان أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\frac{\left(\dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}=\frac{\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{3-\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}=\frac{\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\dfrac{3u_n^2+3-4u_n^2}{u_n^2+1}}=\frac{\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\dfrac{3-u_n^2}{u_n^2+1}}=\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}\times\frac{u_n^2+1}{3-u_n^2}=\frac{4u_n^2}{3-u_n^2}=4\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2}=4v_n$$

- **حساب الحد الاول :**

$$v_0=\frac{u_0^2}{3-u_0^2}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$.v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times 4^n$

- استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ تكافئ $v_n\left(3-u_n^2\right) = u_n^2$ تكافئ $3v_n - v_n u_n^2 = u_n^2$ تكافئ $3v_n = u_n^2 + v_n u_n^2$

تكافئ $3v_n = u_n^2\left(1+v_n\right)$ تكافئ $u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n}$ ومنه : $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}}$

وبالتالي : $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1+v_n}} = \sqrt{\frac{3\times\left(\frac{4^n}{2}\right)}{1+\left(\frac{4^n}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{3\times 4^n}{2}}{\frac{2+4^n}{2}}} = \sqrt{\frac{3\times 4^n}{2}\times\frac{2}{2+4^n}} = \sqrt{\frac{3\times 4^n}{2+4^n}}$

ج) حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3\times 4^n}{2+4^n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3\times 4^n}{4^n\times\left(\frac{2}{4^n}+1\right)}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{2}{4^n}+1}} = \sqrt{\frac{3}{0+1}} = \sqrt{3}$$

-5 حساب P_n بدلالة n :

$$P_n = \frac{\left(u_0\times u_1\times\ldots\times u_n\right)^2}{\left(3-u_0^2\right)\left(3-u_1^2\right)\ldots\left(3-u_n^2\right)}$$

$$= \frac{u_0^2}{3-u_0^2}\times\frac{u_1^2}{3-u_1^2}\times\ldots\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$$

$$= v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$$

$$= \frac{4^0}{2}\times\frac{4^1}{2}\times\ldots\times\frac{4^n}{2}$$

$$= \frac{4^0\times 4^1\times\ldots\times 4^n}{2^{n-0+1}}$$

$$= \frac{4^{0+1+\ldots+n}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n(n+1)}}{2^{n+1}} = 2^{n^2+n-(n+1)}$$

$$= 2^{n^2-1}$$